ماخ

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

دفترچه سوالات به همراه پاسخنامه تشریحی
مرحله دوم
پنجمین دوره‌ی المپیاد نجوم و اخترفیزیک سال ۱۳۸۸

تعداد سوالات تشریحی	مدت آزمون (دقیقه)
۷	۲۱۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب غیر قابل برنامه‌ریزی مجاز است.

تذکرات پیش از آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما داوطلب گرامی، خواهشمند است به نکات زیر دقیقاً توجه فرمایید:

- تعداد سؤالات این آزمون **۷ سؤال** و وقت آن **۳ ساعت و نیم** است.
- بر روی هر برگه پیش نویس که به شما داده می‌شود نام و نام خانوادگی خود را حتماً بنویسید.
- در زیر خط چین بالای پاسخنامه غیر از جواب سؤالات هیچ علامت یا عبارت مشخصه‌ای ننویسید.
- معرفی نامه و کارنامه‌ی خود را در دسترس نگه دارید تا مسئول مربوط بتواند آن‌ها را ملاحظه و جمع‌آوری نماید.
- استفاده از ماشین حساب مهندسی که قابل برنامه ریزی نباشد، مجاز است.
- استفاده از جدول‌های نجومی، اطلس‌ها و آلماناک‌ها به هر شکل که باشند، مجاز نیست.
- هنگام آزمون همراه داشتن تلفن همراه (خاموش یا روشن) تخلف محسوب می‌شود. لذا آن را قبل از شروع آزمون به مسئول حوزه تحویل دهید.
- نتایج این آزمون در اواخر خرداد ماه اعلام خواهد شد.
- پاسخنامه‌ی تشریحی این آزمون توسط آقای **کامبیز خالقی** تهیه شده است.

ثوابت فیزیکی و نجومی

G	ثابت جهانی گرانش	$6/67\times10^{-11}m^{3}kg^{-1}s^{-2}$
σ	ثابت استفان بولتزمن	$5/67\times10^{-8}Wm^{-2}K^{-4}$
h	ثابت پلانک	$6/63\times10^{-34}Js$
c	سرعت نور	$3\times10^{8}ms^{-1}$
	سال نجومی	$365/26\,days$
pc	پارسک	$3/09\times10^{16}m$
Au	واحد نجومی	$1/50\times10^{11}m$
Ly	سال نوری	$9/46\times10^{15}m$
$R_{\odot}$	شعاع خورشید	$6/96\times10^{8}m$
$R_{\oplus}$	شعاع زمین	$6/38\times10^{6}m$
	شعاع مشتری در استوا	$7/15\times10^{7}m$
	شعاع ماه	$1/74\times10^{6}m$
	شعاع مداری ماه	$3/84\times10^{8}m$
$M_{\odot}$	جرم خورشید	$1/99\times10^{30}kg$
$M_{\oplus}$	جرم زمین	$5/97\times10^{24}kg$
	جرم مشتری	$1/90\times10^{27}kg$
$T_{\odot}$	دمای خورشید	$5777\,K$
$L_{\odot}$	درخشندگی خورشید	$3/85\times10^{26}W$
	ثابت خورشیدی	$1/37\times10^{3}Wm^{-2}$
	قدر مطلق بولومتریک خورشید	$4/72$
$m_{\odot}$	قدر ظاهری خورشید	$-26/8$
	قدر ظاهری ماه بدر	$-13/7$
	عمر خورشید	$10^{10}years$
H	ثابت هابل	$70Km\,s^{-1}Mpc^{-1}$

۱- با فروپاشی α در هسته پلوتونیوم ^{238}Pu (نیمه عمر ۸۷/۷ سال، جرم هسته ۲۳۸/۰۵)، هسته اورانیوم ^{234}U به وجود می‌آید. در این فرآیند مقدار $5/49MeV$ انرژی آزاد می‌شود. در مولدهای موسوم به رادیوگرمایی، از انرژی گرمایی فرآیند برای تولید انرژی استفاده می‌شود. فضاپیمای $Voyager$ ۲، که در تاریخ ۳۰ مرداد ۱۳۵۶ به فضا پرتاب شد، در مسیر خود از نزدیکی ۴ سیاره، از جمله سیاره زحل در فاصله $9/5AU$ از خورشید، در تاریخ ۵ شهریور ۱۳۵۸ عبور کرد. منبع تغذیه آن یک مولد رادیو گرمایی با بازدهی ۵/۵٪ بود که $4/5kg$ پلوتونیوم ^{238}Pu به همراه داشت. هم دوره با این فضاپیما، ایستگاه فضایی $Skylab$ (سال‌های ۱۳۵۷ – ۱۳۵۲) بود که برای تغذیه انرژی آن پنل‌های خورشیدی با مساحت $730m^2$ و توان $10/5kW$ طراحی شده بودند اما در هنگام پرتاب آسیب دیدند. اگر در فضاپیمای $Voyager$ ۲ نیز برای تولید انرژی از پنل‌های خورشیدی همانند ایستگاه فضایی $Skylab$ استفاده می‌شد، به گونه‌ای که مقدار انرژی آن برابر با مولد رادیوگرمایی آن باشد، چه مساحتی برای این پنل‌ها باید در نظر گرفته می‌شد؟

۲- رصد و اندازه‌گیری سرعت‌های چرخشی ستاره‌ها به دور مرکز کهکشان‌های مارپیچی نشان می‌دهد که در فاصله‌های زیاد چند کیلو پارسکی، از مرکز کهکشان داریم: $lim_{r\to\infty}V(r) = V_{const}$. فرض کنید که در کهکشان‌های مارپیچی، نسبت جرم به درخشندگی و همچنین نسبت درخشندگی به سطح مقدار ثابتی است. رابطه‌ی زیر را با فرض توزیع کروی و متقارن برای ستاره‌ها و قانون جاذبه‌ی نیوتنی بدست آورید.

$$M = -10\log V_{const} + Const$$

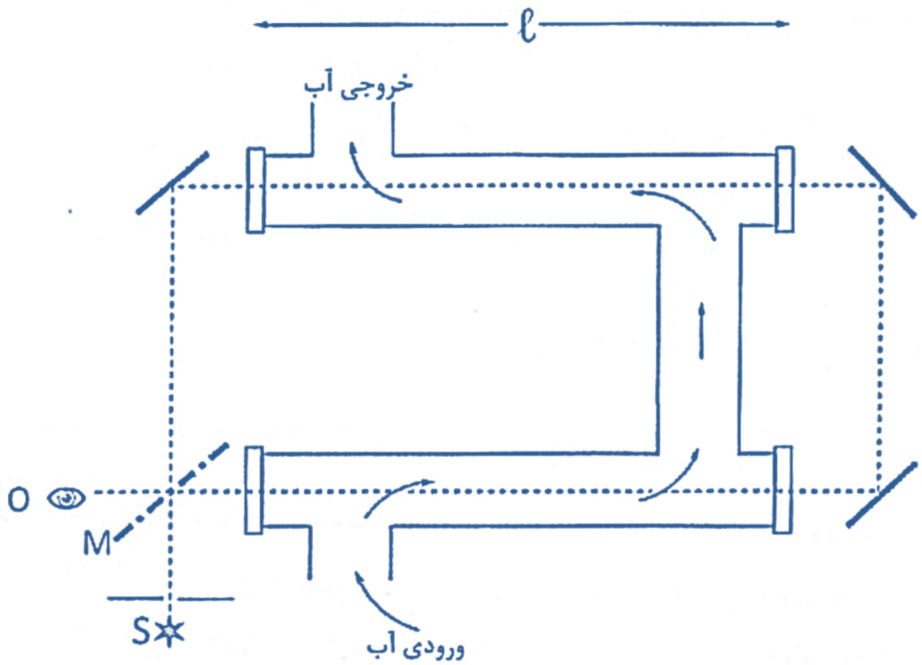
(M قدر مطلق کهکشان است.)

۳- کوتوله‌ی سفید ستاره‌ای است که جرم آن از مرتبه‌ی جرم خورشید، و شعاع آن از مرتبه‌ی شعاع زمین است.

الف) فرض کنید یک کوتوله‌ی سفید از تحول ستاره‌ای مثل خورشید ساخته شده باشد. و فرض کنید طی این تحول ماده‌ی مجاور سطح این ستاره یک رسانای بسیار خوب است. چنان که هر مدار فرضی که بگیریم، نیروی محرکه‌ی الکتروموتوری در آن مدار صفر است. شار مغناطیسی که از یک مدار فرضی می‌گذرد را در نظر بگیرید، انقباض مدار همراه با ستاره را دنبال کنید، و از آنجا شدت میدان مغناطیسی در سطح ستاره (B) را وقتی شعاع ستاره در حال انقباض (r) است، حساب کنید.

ب) با استفاده از اینکه شدت میدان مغناطیسی در سطح خورشید $2\times10^{-4}T$ است، شدت میدان مغناطیسی در سطح یک کوتوله‌ی سفید را تخمین بزنید.

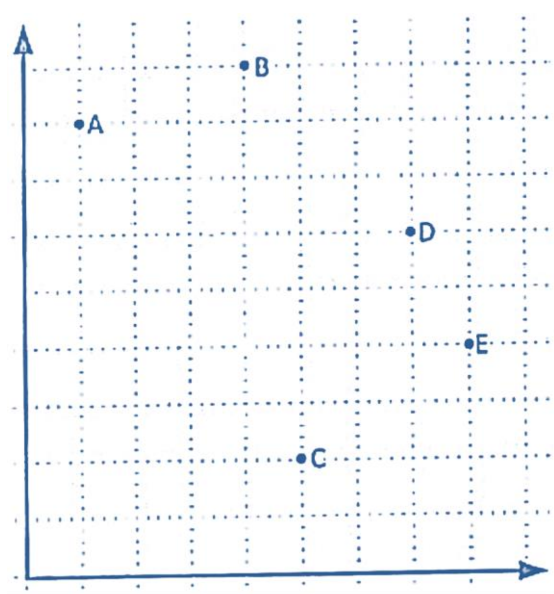
۴- در سال ۱۸۵۱، فیزو سرعت نور را در محیط متحرک به وسیلهٔ تداخل سنجی که طرح آن را در شکل زیر می‌بینید، مورد بررسی قرار داد. نوری با طول موج λ از منبع S به وسیلهٔ آینه‌ی M به دو شعاع تقسیم می‌شود. شعاع‌ها به دور تداخل سنج در دو جهت مختلف حرکت می‌کنند و در تلسکوپ ناظر O که شکل فریز را می‌بینید با هم ترکیب می‌شوند. دو بازوی تداخل‌سنج لوله‌هایی پر از آب به طول ℓ هستند که به صفحه‌هایی از شیشه‌ی مسطح منتهی می‌شوند. آب در لوله‌ها جاری است، به‌طوری‌که یکی از شعاع‌های نوری در جهت جریان آب و دیگری در خلاف جهت جریان آب حرکت می‌کند. **بدون** در نظر گرفتن اثرات نسبیتیِ جمع سرعت‌ها، جابه‌جایی فریز وقتی آب با سرعت v جریان دارد چقدر است؟



۵- شکل زیر پنج نقطه از مدار جرمی آسمانی را نشان می‌دهد که مختصات نقاط آن به صورت زیر است.

$A:(۱,۸)$ $\quad B:(۴,۹)$ $\quad C:(۵,۲)$ $\quad D:(۷,۶)$ $\quad E:(۸,۴)$

این مدار کدام یک از مقاطع مخروطی است؟ مشخصات مدار را محاسبه کنید.



۶- مدار جسم A که به دلیل گرانش جسم B دور B می‌گردد، بیضی است پس جسم B در یکی از کانون‌های این بیضی قرار دارد و معادله‌ی مدار به صورت:

$$r=\frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\theta}$$

است، که در آن a نیم قطر بزرگ بیضی، ε خروج‌ازمرکز بیضی، r فاصله‌ی A با B و θ زاویه‌ی بردار واصل B به A با بردار واصل B به D (حضیض مدار A) است.

جسم A را کره‌ی کوچکی در نظر بگیرید که به دور خودش هم می‌چرخد. محور این چرخش بر مدار A عمود است، جهت چرخش همان جهت گردش مداری A است، دوره‌ی چرخش با دوره‌ی مداری برابر است و سرعت چرخش ثابت است. در این صورت اگر خروج از مرکز مدار صفر می‌بود، از B فقط نیمی از A دیده می‌شد. فرض کنید خروج از مرکز مدار بسیار کوچک‌تر از یک است و وابستگی زاویه θ با زمان (t) به صورت زیر است، که در آن صفرِ t از حضیض مدار محاسبه می‌شود. (l اندازه حرکت زاویه‌ای است.)

$$t=\frac{1}{\lambda}(\theta-2\varepsilon\sin\theta)\qquad,\qquad \lambda=\frac{l}{ma^2(1-\varepsilon^2)^2}$$

حالا B چه کسری از A را می‌بیند؟

۷- هواپیمایی در ارتفاع ۴۰۰۰ متری از سطح زمین در نقطه‌ای با عرض جغرافیایی 60° شمالی، با سرعت $200 km/h$ نسبت به سطح زمین به سمت شرق در حال پرواز است. از دید او ستاره‌ی A با افق مماس می‌شود. ستاره‌ی B که ۶ ساعت جلوتر از A است و میل آن 18° کمتر از میل ستاره‌ی A است، چند ساعت بعد، از دید خلبان غروب می‌کند؟

۱- با توجه به صورت سوال، در واپاشی هر اتم، مقدار ۵/۴۹ میلیون الکترون‌ولت انرژی آزاد می‌شود. حال با توجه به جرم اتمی و عدد اتمی هسته‌ی اتم؛ میزان انرژی آزاد شده به ازای هر واحد جرم را چنین بدست می‌آوریم:

$$n = \frac{\Delta E}{\Delta m} \Rightarrow n = \frac{۵/۴۹}{۲۳۸/۰۵} = ۲/۲ \times ۱۰^{۱۲} \; {}^{j}\!/_{kg}$$

از طرفی می‌دانیم که:

$$m = m_{\circ} e^{-\lambda t} \qquad *$$

در این رابطه t مدت زمان، $m_{\circ}$ جرم اولیه و λ ثابتی است که برای تعیین نیمه‌عمر از آن می‌شود. رابطه‌ی فوق را می‌توان بر حسب λ چنین مرتب کرد:

$$\lambda = -\frac{\ln ۰/۵}{\tau}$$

از جاگذاری رابطه‌ی اخیر در عبارت $*$ خواهیم داشت:

$$m = m_{\circ} e^{\frac{\ln ۰/۵}{\tau} t}$$

برای بدست آوردن سرعت مصرف m بر حسب زمان، از این عبارت مشتق می‌گیریم که آنگاه خواهیم داشت:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\ln ۰/۵}{\tau} m_{\circ} e^{\frac{\ln ۰/۵}{\tau} t}$$

از طرف دیگر می‌دانیم که:

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta m} \times \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

پس برای بازده P ، می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = n \times (\frac{\ln ۰/۵}{\tau} m_{\circ} e^{\frac{\ln ۰/۵}{\tau}}) \times Ra$$

که در آن Ra بازده مولد است. از طرفی توان ایستگاه فضایی باید با توان فضاپیما برابر باشد پس می‌توانیم چنین بنویسیم (در این عبارت P' توان ایستگاه و S' مساحت ایستگاه است.)

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = P' \times \left(\frac{۱}{d}\right)^{۲} \times \left(\frac{S}{S'}\right) = n \times (\frac{\ln ۰/۵}{\tau} m_{\circ} e^{\frac{\ln ۰/۵}{\tau}}) \times Ra$$

با مرتب کردن این عبارت بر حسب S خواهیم داشت:

$$S = n \times (\frac{\ln ۰/۵}{\tau} m_{\circ} e^{\frac{\ln ۰/۵}{\tau}}) \times Ra \times S' \times d^{۲} \times \frac{۱}{P'}$$

از طرف دیگر، اختلاف زمان را چنین بدست می‌آوریم:

$$\Delta t = ۱۳۵۸/۶/۵ - ۱۳۵۶/۵/۳۰$$

که حاصل آن، برابر ۲ سال و ٦ روز می‌شود. با جاگذاری این مدت زمان در رابطه‌ی آخر؛ مقدار مساحت فضاپیما برابر مقدار تقریبی ۸۴۰ مترمربع بدست خواهدآمد.

۲- ماخ طبق صورت سوال می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$L \propto M \quad , \quad L \propto R^{۲} \quad , \quad V^{۲} \propto \frac{M}{R}$$

در عبارت بالا: L درخشندگی، M جرم، R شعاع کهکشان و V دارای یک مقدار ثابت است.

پس می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} L = cte\times M \\ L = cte\times R^{۲} \Rightarrow \sqrt{L} = cte\times R \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{L} = cte\times \dfrac{M}{R} \\ V^{۲} = cte\times \dfrac{M}{R} \Rightarrow \dfrac{M}{R} = \dfrac{V^{۲}}{cte} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{L} = cte\times V^{۲} \Rightarrow L = V^{۴}\times cte$$

با جایگذاری تساوی اخیر در معادله‌ی مشهور ذیل داریم:

$$M = -۲/۵\log L + Const \quad \Rightarrow$$
$$M = -۲/۵\log(V^{۴}\times cte) + Const = -۱۰\log V + Const$$

۳- برای شار عبوری از سطح دلخواه A داریم:

$$\varphi = \int \vec{B}\times d\vec{A}$$

می‌دانیم $\varepsilon = \dfrac{d\varphi}{dt} = ۰$. از این رابطه φ (همان شار مغناطیسی) دارای مقداری ثابت است. B هم مقدار ثابتی دارد؛ پس می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$\varphi = ۴\pi r^{۲}B \quad \Rightarrow \quad B\times r^{۲} = B_{۰}\times r_{۰}^{۲} \quad \Rightarrow \quad B = B_{۰}\times\left(\frac{r_{۰}}{r}\right)^{۲}$$

ب)

$$B = B_{۰}\times\left(\frac{r_{۰}}{r}\right)^{۲} = B_{۰}\times\left(\frac{r_{Sun}}{r_{White\,dwarf}}\right)^{۲} = B_{۰}\times\left(\frac{r_{Sun}}{r_{Earth}}\right)^{۲} = ۲/۴T$$

۴- ماخ

در این سوال c سرعت نور و n ضریب شکست آب و N تعداد تناوب موج است.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \Delta t = ۲l\left(\dfrac{۱}{\frac{c}{n}-v} - \dfrac{۱}{\frac{c}{n}+v}\right) = \dfrac{۴\ell n^{۲}v}{c^{۲}} \\ c\Delta t = \Delta x \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta x = \dfrac{۴\ell n^{۲}v}{c} \\ \Delta x = N\times\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow N = \frac{۴\ell n^{۲}v}{c\lambda}$$

۵- ماخ می‌دانیم که صورت کلی معادله‌ی مقاطع مخروطی، به صورت زیر است:

$$ax^{2}+by^{2}+cxy+dx+ey+f=0$$

مختصات ۵ تا از نقاط واقع بر روی این مقطع مخروطی را داریم. از طرف دیگر برای حل این دستگاه به یک معادله‌ی دیگر هم نیاز است. در این راه حل، از معادله‌ی گذرنده از دو نقطه‌ی A و B که به صورت زیر است، استفاده می‌کنیم.

$$3y-x-23=0$$

با حل عددی این دستگاه، مقادیر ذیل بدست خواهند آمد:

$$a=508,\quad b=382,\quad c=578,\quad d=-7828,\quad e=-6814,\quad f=32760$$

حال که معادله‌ی منحنی گذرنده از این ۵ نقطه را بدست آورده‌ایم باید نوع این مقطع مخروطی را نیز مشخص کنیم. برای این کار باید کل منحنی را به قدری دوران دهیم که معادله، به صورت متعارف و کلی معادله‌ی مقاطع مخروطی در بیاید، مقدار این دوران مطلوب از رابطه‌ی ذیل بدست خواهد آمد:

$$\tan 2\theta=\frac{c}{a-b}=\frac{578}{508-382} \Rightarrow \theta=128/8^{\circ}$$

معادله‌ی دوران یافته با استفاده از ماتریس تبدیل ذیل بدست می‌آید:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

با حل این ماتریس داریم:

$$x=x'\cos\theta-y'\sin\theta$$
$$y=x'\sin\theta+y'\cos\theta$$

با جاگذاری و حل این معادله خواهیم داشت:

$$\frac{(x'-1/33)^{2}}{25/46}+\frac{(y'+6/99)^{2}}{5/13}=1$$

از مقایسه این عبارت با صورت کلی مقاطع مخروطی داریم:

$$a\cong 5$$
$$e\cong 0/89$$

از آنجا که خروج از مرکز این منحنی، کوچک‌تر از یک است؛ مقطع مخروطی مورد اشاره، بیضی است.

۶- ماخ طبق صورت سؤال، لحظه‌ی صفر را زمانی در نظر می‌گیریم که جسم اول در حضیض مداری خود قرار گرفته باشد. اگر مدار دایره‌ای بود (خروج از مرکز صفر بود) ناظری که روی جسم A، در لحظه‌ی صفر جسم B را در سمت‌الراس خود مشاهده می‌کرد؛ همواره و بعد از گذشت زمان، مختصات سمتی- ارتفاعی جسم B را بدون تغییر می‌دید. اما با توجه به صورت سوال، مدار جسم بیضی است. پس طبق روابط پیش‌فرض در صورت سوال، می‌توانیم چنین بنویسیم:

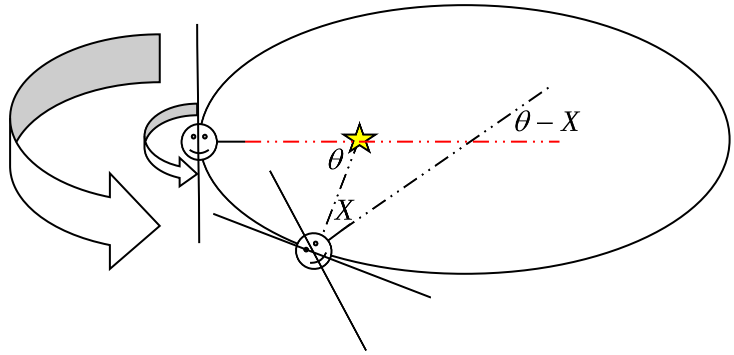
$$t=\frac{1}{\lambda}(\theta-2e\sin\theta) \quad\Rightarrow\quad \lambda t=(\theta-2e\sin\theta)$$

از طرف دیگر، در صورت مسئله داشتیم:

$$\lambda = \frac{l}{ma^{۲}(۱-e^{۲})^{۲}}$$

بعد از گذشت این مدت زمان، جسم A هم تحت تأثیر گردش وضعی‌اش، کمی حول محور خود دوران کرده است. مقدار این دوران بر حسب دوره تناوب وضعی P و مدت زمان t ، بدین‌سان محاسبه می‌شود. این زاویه در شکل با امتداد دادن محل قرار گیری ناظر و با خطوط خط چینِ سیاه، مشخص شده است.

$$X = \frac{۲\pi}{P} t$$



مقدار مطلوب، زاویه‌ی میان دو خط سیاه رنگی است که بخش قابل مشاهده‌ی سطح سیاره در طی زمان را نشان می‌دهد. با استفاده از روش‌های هندسه‌ی مسطحه، این زاویه برابر $\theta - X$ بدست می‌آید. از این پس این زاویه را Y می‌نامیم.
از طرف دیگر، طبق قانون سوم کپلر می‌دانستیم:

$$P^{۲} = \frac{۴\pi^{۲}a^{۳}}{Gm}$$

پس خواهیم داشت:

$$l = \frac{۲\pi ma^{۲}\sqrt{(۱-e^{۲})}}{P}$$

بنابراین زاویه Y چنین بدست می‌آید:

$$Y = ۲e\sin\theta$$

و حداکثر مقدار Y برابر $۲e$ (یک بار در قسمت شرقی و بار دیگر در قسمت غربی مدار) خواهد بود. پس در کل تناوب، تنها کسری از آن دیده می‌شود.

$$n = \frac{\pi + ۴e}{۲\pi} = \frac{۱}{۲} + \frac{۲e}{\pi}$$

۷- از آنجا که در صورت سؤال، سرعت هواپیما از نقطه‌ای بر سطح زمین سنجیده می‌شود، باید سرعت گردش وضعی زمین را هم اعمال کنیم:

$$\omega = \frac{v_{airplane} + v_{earth}\cos\varphi}{R_{earth} + h} = ۰/۲۹۴\,\frac{rad}{h}$$

هواپیما در ارتفاع ٤ کیلومتری از سطح زمین پرواز می‌کند، بنابراین، میزان افق منفی ناظر واقع در هواپیما را این چنین بدست می‌آوریم:

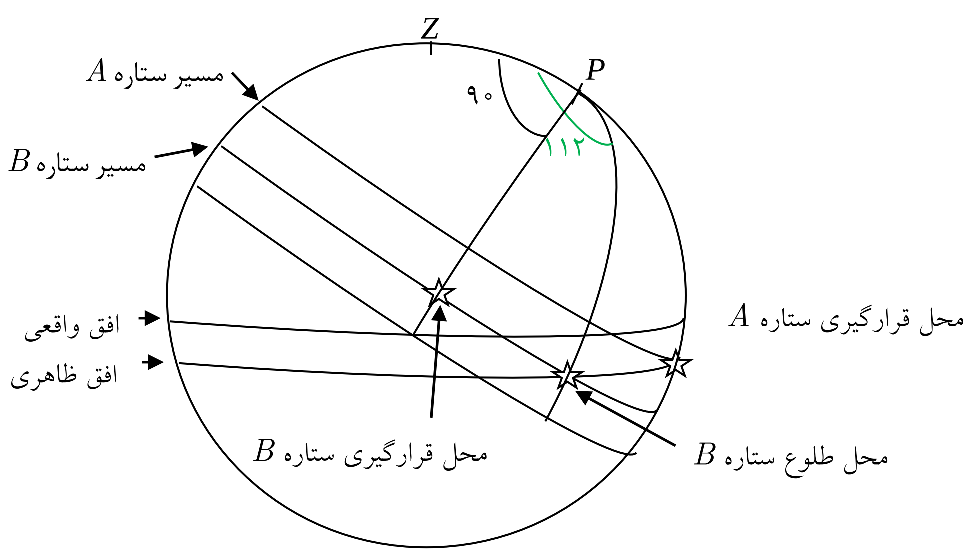
$$a = \cos^{-1}\left(\frac{r_{earth}}{r_{earth} + h_{airplane}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{۶۴۰۰}{۶۴۰۴}\right) = ۲/۰۲$$

منظور سوال از بیان این نکته که ستاره با افق مماس می‌شود، این است که ستاره -تنها- با افق مماس می‌شود -و غروب نمی‌کند.- با دانستن این نکته می‌توانیم میل ستاره‌ی A را چنین برآورد کنیم:

$$\left.\delta_A = ۹۰ - \phi - a = ۲۸^\circ \quad , \quad \delta_B = \delta_A - ۱۸\right\} \Rightarrow \quad \delta_B = ۱۰^\circ$$

زاویه‌ی ساعتی ستاره B در هنگام طلوع این چنین بدست می‌آید:

$$\cos ۹۲ = \cos ۳۰ \cos ۸۰ + \sin ۳۰ \sin ۸۰ \cos H \quad \Rightarrow \quad H = ۱۱۲^\circ$$



توجه: کمان سبز رنگ در پشت کره است.

حال می‌بینیم که ستاره‌ی B برای رسیدن به نقطهٔ غروب در پشت کره، باید کمانی به طول ۹۰ + ۱۱۲ درجه که برابر است با ۲۰۲ درجه را طی کند. از ابتدای راه حل به یاد داریم که هواپیما در هر ساعت ۰/۲۹٤ رادیان را به دور مرکز زمین می‌پیماید. پس با نوشتن یک تناسب ساده برای پیمودن کمان ۲۰۲ درجه‌ای، پاسخ مطلوب بدست می‌آید:

۱ ساعت	۰/۲۹٤ رادیان
x ساعت	۳/۵۲ رادیان

در نتیجه $x \simeq ۱۲h$